ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«Петлевые уравнения в матричных моделях»

Выполнил студент
243м группы
Бакауов Филипп Эльмарович

____
подпись студента

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук
Зенкевич Егор Андреевич

____
подпись научного руководителя

Допущен к защите
Зав. кафедрой ____________________
подпись зав. кафедрой

Москва
2020

Оглавление

1 Введение

В работе [6] впервые было показано замечательное соответствие,названное в честь авторов работы–АГТ-гипотезой.В нём устанавливается равенство между целым набором параметров двух теорий–четырёхмерной суперконформной теорией поля и двумерной конформной теорией Лиувилля.В частности,имеет место равенство между функциями Некрасова инстантонных сумм и конформным блоком в теории Лиувилля.Однако нас будет интересовать скорее способ доказательства данных соотнощений.В работе [10] был предложен способ доказательства путём почленного сравнения и доказательства равенства для разложения функций Некрасова и конформных блоков по некоторому параметру.Для целей почленного доказательства для конформных блоков вводится формализм Доценко-Фатеева(см.[1]).Это представление позволяет записывать конформные блоки,как некоторые интегралы по мере,которая зависит от теории,которую мы рассматриваем.Подынтегральное же выражение зависит в целом от вида конформного блока и размерности внешних примарных полей.Для наших же целей данный интеграл выгодно выразить через интегралы Сельберга–определённого вида матричную модель,которую также можно назвать β-ансамбля(см.[10],(48)).

В доказательстве в работе [10] предложен метод разложения такого интеграла в ряд по комбинациям интегралов по такой же мере от неких полиномов или их комбинаций.Такой подход развит в работе [8],где конформный блок раскладывается в ряд по членам,каждый из которых представляет собой произведение двух средних от так называемых обобщённых полиномов Джека,по той же мере интеграла Сельберга.Для $q-$деформированного случая,соответствующего 5d теории,вместо полиномов Джека задействуются полиномы Макдональда(см.[2],[11]).Любопытна здесь также связь данного построения с теорией интегрируемых систем,в частности полиномы Макдональда являются собственными функциями тригонометрической модели Рудженаарса-Шнейдера.Переход от четырёхмерной теории к пятимерной осуществляется так называемой $q-$деформацией,вид которой приведён в работе [11].В данной работе мы возвращаемся в четырёхмерную теорию,но несколько "необычным"образом.Мы исследуем также способ получения полиномиальных средних от любых симметрических полиномов,а так как полиномы Макдональда,Джека,Шура и другие раскладываются по базису симметрических полиномов,то это позволяет нам вычислять средние и от них.Таким образом задача отыскания интеграла по определённой сложной мере сводится к решению системы линейных уравнений.Мы строим конструкцю таких петлевых уравнений в нетривиальном $h-$пределе и проверяем её.Также мы исследуем предел от средних полиномов Макдональда,и связываем его с теми же петлевыми уравнениями.Некоторая часть работы посвящена начальному анализу рациональной модели Рудженаарса-Шнейдера,которая получается из тригонометрической модели при взятии предела,в частности вопросу об отыскании собственных функций гамильтониана этой модели.

2 Петлевые уравнения

2.1 Переход к пределу

Величины в 5d теории выражаются через величины 4d теории следующим образом [4] (2.55):

$$(\dots)_{5d/3d} = e^{-h(\dots)_{4d/2d}} \tag{1}$$

При стремлении q к единице,а h к нулю мы и получаем 4d предел 5d теории.Параметры,которые будут видоизменяться это $q = e^h$,$t = e^{h\beta}$.Нам часто будет встречаться т.н. q-символы Похгаммера:$(a;q)_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)$.В частности $(a;q)_\infty = \prod\limits_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$.Покажем,как преобразуются эти выражения при взятии предела.

Для этого нам будет достаточно 1-ого порядка разложения $q = 1+h$,а также определение по Эйлеру гамма-функции :$\Gamma(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\frac{1}{x}$. q-деформированная гамма-функция:$\Gamma_q(x) = (1-q)^{1-x}\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}$.

$\Gamma_q(x+1) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^{x+1};q)_\infty}(1-q)^{-x} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1-q^{n+x}}(1-q)^{-x} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)(1-q^{n+1})^x}{(1-q^{n+x})(1-q^n)^x} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-hn)(-h(n+1))^x}{(-h(n+x))(-hn)^x} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+x}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = \left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\frac{1}{x}\right)x = x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

Отсюда получаем нужное нам выражение для Гамма-предела(см.[3]):

$$\lim_{q\to 1}\frac{(q^x;q)_\infty}{(q;q)_\infty} = (-\hbar)^{1-x}\frac{1}{\Gamma(x)}. \tag{2}$$

Соответственно,сами x_i преобразуется следующим образом:

$$x_i = q^{w_i} = e^{\hbar w_i}, q = e^{\hbar}, x_i = 1-(1-x_i) = 1-(x_i;q)_1 = 1-\tfrac{(x_i;q)_\infty}{(x_iq;q)_\infty} \longrightarrow 1-\tfrac{\Gamma(w_i+1)}{\Gamma(w_i)}(-\hbar)^1 =$$

$$= 1+\hbar\frac{\Gamma(w_i+1)}{\Gamma(w_i)} = 1+\hbar w_i, q = 1+\hbar. \tag{3}$$

Видим,что мы взяли предел правильно,так как наше разложение совпадает с разложением экспоненты в 1-ом порядке.

Далее,по определению,интегрирование в q-анализе выполняется следующим образом(см.[9]):

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q)a\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j a) \tag{4}$$

Это определение видоизменяется при переходе к h-анализу (см.[9]),учитывая связь $q = e^h$:

$$\int_a^b f(x)d_hx = \begin{cases} h\big(f(a)+f(a+h)+\cdots+f(b-h)\big), & a<b \\ 0, & a=b \\ -h\big(f(b)+f(b+h)+\cdots+f(a-h)\big), & a>b \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_0^1 d_qxf(x) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j) = (-h)\sum_{j=0}^{\infty} e^{hj}f(e^{hj}) = (-h)\sum_{j=0}^{\infty}(1+hj)f(1+hj) = \int_1^{\infty} d_hx(xf(x))$$

Теперь рассмотрим функцию,схожую по строению с функцией из выражения в исходном случае:

$$F = \frac{1}{x}(q^{x\partial_x}-1)f(x) \tag{6}$$

.Тогда: $\int_0^1 d_qxF(x) = \int_1^{\infty} d_hx(xF(x)) = \int_1^{\infty} d_hxx\frac{1}{x}(q^{x\partial_x}-1)f(x) = \int_1^{\infty} d_hx(q^{x\partial_x}-1)f(x) = \int_1^{\infty} d_hx(e^{\partial_x}-1)f(x) = (-h)\sum_{j=0}^{\infty}(e^{\partial_x}-1)f(1+hj) =$

$$= (-h)(f(1+h)-f(1)+f(1+2h)-f(1+h)+\dots) = hf(x)|_{x=1}$$

Зная,что $f(x)|_{x=1} = 0$ или,в переменных w , $f(w)|_{w=0} = 0$ получаем,что при переходе к пределу и смене вида интегрирования выражение при том же условии остаётся равным 0.Это свойство понадобится нам в подразделе 2.3.Если перейти к w_i, $x_i = 1+hw_i$,получаем пределы $\int\limits_{\infty}^{1} d_h x = \int\limits_{\infty}^{0} (d_h w)x$.

Вспомним,как преобразуется подынтегральное выражение.В прошлый раз не была учтена одна деталь,которая будет отмечена ниже.

2.2 Вывод меры интеграла Сельберга

Ещё раз напомним вид среднего в q-случае(см [2]):

$$\langle f(x)\rangle = \frac{\int d_q^N x \prod\limits_{k=1}^{N}\left(x_k^u \prod\limits_{a=0}^{\nu-1}(q^a x_k - 1)\right)\Delta^{(q,t)} f(x)}{\int d_q^N x \prod\limits_{k=1}^{N}\left(x_k^u \prod\limits_{a=0}^{\nu-1}(q^a x_k - 1)\right)\Delta^{(q,t)}} \tag{7}$$

Преобразования:

$$\prod_{k=0}^{\nu-1}(q^k x_i - 1) = (-1)^\nu \prod_{k=0}^{\nu-1}(1-q^k x_i) = (-1)^\nu (x_i;q)_\nu = (-1)^\nu \frac{(x_i;q)_\infty}{(x_i q^\nu;q)_\infty} = (-1)^\nu \frac{\frac{(x_i;q)_\infty}{(q;q)_\infty}}{\frac{(x_i q^\nu;q)_\infty}{(q;q)_\infty}} =$$
$$(-1)^\nu \frac{\frac{(q^{w_i};q)_\infty}{(q;q)_\infty}}{\frac{(q^{w_i+\nu};q)_\infty}{(q;q)_\infty}} \longrightarrow (-1)^\nu(-\hbar)^{1-w_i}\frac{1}{\Gamma(w_i)}(-\hbar)^{w_i+\nu-1}\frac{1}{\Gamma(w_i+\nu)} = (\hbar)^\nu \frac{\Gamma(w_i+\nu)}{\Gamma(w_i)}.$$

$$\Delta^{(q,t)}(x) = \prod_{k=0}^{\beta-1}\prod_{i\neq j}(x_i - q^k x_j) = \prod_{i\neq j} x_i^\beta \prod_{k=0}^{\beta-1}(1-q^k\tfrac{x_j}{x_i}) = \prod_{i\neq j} x_i^\beta(\tfrac{x_j}{x_i};q)_\beta = \prod_{i\neq j} x_i^\beta \frac{(\frac{x_j}{x_i};q)_\infty}{(q^\beta\frac{x_j}{x_i};q)_\infty} =$$
$$\prod_{i\neq j} x_i^\beta \frac{(q^{w_j-w_i};q)_\infty}{(q^{\beta+w_j-w_i};q)_\infty} = \prod_{i\neq j} x_i^\beta \frac{\frac{(q^{w_j-w_i};q)_\infty}{(q;q)_\infty}}{\frac{(q^{\beta+w_j-w_i};q)_\infty}{(q;q)_\infty}} \longrightarrow \prod_{i\neq j} x_i^\beta (-\hbar)^{1+w_i-w_j}\frac{1}{\Gamma(w_j-w_i)}(-\hbar)^{-1-w_i+w_j+\beta} *$$
$$*\Gamma(\beta+w_j-w_i) = (-\hbar)^\beta \prod_{i\neq j} x_i^\beta \frac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)}.$$

Со степенями x_i^u есть 2 варианта:

1. $u \sim 1$ при $q \to 1$

   Тогда

$$x_i \longrightarrow 1 + hw_i, \prod_{i=1}^{N} x_i \longrightarrow 1 + h\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = 1 + hp_1, \prod_{i=1}^{N} x_i^u \longrightarrow 1 + hup_1.$$

2. $u = \frac{a}{\hbar}$ при $q \to 1$

$$(1 + \hbar w_i)^{\frac{a}{\hbar}} = (1 + \tfrac{aw_i}{\frac{1}{\hbar}})^{\frac{a}{\hbar}} = e^{aw_i}.$$

Соответственно: $\prod\limits_{i=1}^{N} x_i^u \longrightarrow \prod\limits_{i=1}^{N} e^{aw_i}$.

Рассмотрим выражение:

$$(-\hbar)^\beta \prod_{i \neq j} x_i^\beta \tfrac{\Gamma(\beta + w_j - w_i)}{\Gamma(w_j - w_i)}.$$

Каждая переменная x_i^β входит в это выражение $N - 1$ раз,так как присутствует произведение i, j с каждым j,не равным i.Таким образом:

$$(-\hbar)^\beta \prod_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta} \prod_{i \neq j} \tfrac{\Gamma(\beta + w_j - w_i)}{\Gamma(w_j - w_i)}.$$

Таким образом,для среднего от функции,опуская нормировку и все внешние степени $\hbar$,имеем:

- $\langle f(x) \rangle = \int\limits_0^\infty d^N w \prod\limits_{i=1}^{N} x_i \prod\limits_{i=1}^{N} e^{aw_i} \tfrac{\Gamma(w_i + \nu)}{\Gamma(w_i)} \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta} \prod\limits_{i \neq j} \tfrac{\Gamma(\beta + w_j - w_i)}{\Gamma(w_j - w_i)} f(w) =$

$$= \int_0^\infty d^N w (1 + h((N-1)\beta + 1)p_1) \prod_{i=1}^{N} e^{aw_i} \frac{\Gamma(w_i + \nu)}{\Gamma(w_i)} \prod_{i \neq j} \frac{\Gamma(\beta + w_j - w_i)}{\Gamma(w_j - w_i)} f(w). \tag{8}$$

- $\langle f(x) \rangle = \int\limits_0^\infty d^N w \prod\limits_{i=1}^{N} x_i (1 + hup_1) \tfrac{\Gamma(w_i + \nu)}{\Gamma(w_i)} \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta} \prod\limits_{i \neq j} \tfrac{\Gamma(\beta + w_j - w_i)}{\Gamma(w_j - w_i)} f(w) =$

$$= \int_0^\infty d^N w (1 + h(u + 1 + \beta(N-1))p_1) \frac{\Gamma(w_i + \nu)}{\Gamma(w_i)} \prod_{i \neq j} \frac{\Gamma(\beta + w_j - w_i)}{\Gamma(w_j - w_i)} f(w). \tag{9}$$

В дальнейшем будем рассматривать только 1-ый случай,2-ой случай рассматривается аналогично.

2.3 Вывод петлевых уравнений

Перейдём к выводу петлевых уравнений.Исходная формула для q-случая выглядит следующим образом(см.[2]):

$$\int d_q^N x \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}(q^{x_i\partial_{x_i}}-1)x_i\left[\frac{x_i-q}{z-x_i}\prod_{i\neq j}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}\prod_{k=1}^{N}\left(x_k^u\prod_{a=0}^{v-1}(q^a x_k-1)\right)\Delta^{(q,t)}(x)f(x)\right]=0. \quad (10)$$

Переходя к пределу:

$x_i = 1+\hbar w_i, t = q^\beta = e^{\hbar\beta} = 1+\hbar\beta, x_i - tx_j = 1+\hbar w_i - (1+\hbar\beta)(1+\hbar w_j) = \hbar(w_i - w_j + \beta) - \hbar^2 w_j\beta, x_i - x_j = \hbar(w_i - w_j)$,

$$\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j} \longrightarrow \frac{w_i-w_j-\beta}{w_i-w_j}, q^{x_i\partial_{x_i}} \longrightarrow e^{\partial_{w_i}}.$$

Преобразуем также:

$$\frac{x_i-q}{z-x_i} = \frac{e^{\hbar w_i}-e^{\hbar}}{e^{\hbar y}-e^{\hbar}} \longrightarrow \frac{\hbar(w_i-1)}{\hbar(y-w_i)} = \frac{w_i-1}{y-w_i}$$

Исходная формула имеет тогда вид(опуская внешние множители $(\hbar)^A$):

$\int d^N w \sum_{m=1}^{N}(e^{\partial_{w_m}}-1)\left(\frac{w_m-1}{y-w_m}\right)\prod_{m\neq n}\frac{w_m-w_n-\beta}{w_m-w_n}(1+h((N-1)\beta+1)p_1)\prod_{i=1}^{N}e^{aw_i}\frac{\Gamma(w_i+\nu)}{\Gamma(w_i)}\prod_{i\neq j}\frac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)}f(w)$
$=0.$

Рассмотрим действие оператора $e^{\partial_{w_i}}$.

$e^{\partial_{w_i}}f(w_i) = f(w_i+1)$. Соответственно действие оператора на множители,входящие в формулу:

$$e^{\partial_{w_m}}\Delta^{(\Gamma)}(w) = \prod_{m\neq j}\frac{(\beta+w_m-w_j)(w_j-w_m-1)}{(w_m-w_j)(\beta+w_j-w_m-1)}\Delta^{(\Gamma)}(w)$$

,

$$e^{\partial_{w_m}}\prod_{m\neq n}\frac{w_m-w_n-\beta}{w_m-w_n}=\prod_{m\neq n}\frac{w_m-w_n-\beta+1}{w_m-w_n+1}$$

,

$$e^{\partial_{w_m}}\prod_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}=\prod_{k=1,k\neq m}^{N}\frac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}\frac{\Gamma(w_m+\nu+1)}{\Gamma(w_m+1)}=\frac{w_m+\nu}{w_m}\prod_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)},$$

$$e^{\partial_{w_m}}\prod_{k=1}^{N}e^{aw_k}=e^{a(w_m+1)}\prod_{k=1,k\neq m}^{N}e^{w_k}=e^{a}\prod_{k=1}^{N}e^{w_k}$$

$$e^{\partial_{w_m}}(1+hAp_1)=e^{\partial_{w_m}}(1+hA\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right))=(1+hA\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)+hA)$$

Учитывая,что разложение по h проводится до 1-ого порядка:

$$\tfrac{1+hA}{1+hB}=(1+h\left(A-B\right))$$

Собирая воедино:

$$e^{\partial_{w_m}}\left(\tfrac{w_m-1}{y-w_m}\right)\prod_{m\neq n}\tfrac{w_m-w_n-\beta}{w_m-w_n}\left(1+h(1+\beta(N-1))p_1\right)\prod_{k=1}^{N}e^{aw_k}\tfrac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}\prod_{i\neq j}\tfrac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)}f(w)=$$
$$\left(\tfrac{w_m}{y-w_m-1}\right)\prod_{m\neq n}\tfrac{w_m-w_n-\beta+1}{w_m-w_n+1}e^{a}\tfrac{w_m+\nu}{w_m}\left(1+h(1+\beta(N-1))p_1+h(1+\beta(N-1))\right)*$$
$$*\left(\prod_{k=1}^{N}e^{aw_k}\tfrac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}\right)\prod_{m\neq j}\tfrac{(\beta+w_m-w_j)(w_j-w_m-1)}{(w_m-w_j)(\beta+w_j-w_m-1)}.$$
$$\Delta^{(\Gamma)}(w)f(w_{j\neq m},w_m+1)=e^{a}\left(\tfrac{w_m+\nu}{y-w_m-1}\right)\left(\prod_{m\neq n}\tfrac{\beta+w_m-w_n}{w_m-w_n}\right)f(w_{j\neq m},w_m+1)*$$
$$*\left(1+h(1+\beta(N-1))p_1+h(1+\beta(N-1))\right)\left(\prod_{k=1}^{N}e^{aw_k}\tfrac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}\Delta^{(\Gamma)}(w)\right).$$

Соответственно:

$$\int d^Nw\sum_{m=1}^{N}(e^{\partial_{w_m}}-1)\left(\tfrac{w_m-1}{y-w_m}\right)\left(1+h(1+\beta(N-1))p_1+h(1+\beta(N-1))\right)\prod_{m\neq n}\tfrac{w_m-w_n-\beta}{w_m-w_n}*$$
$$\prod_{k=1}^{N}e^{aw_k}\tfrac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}\prod_{i\neq j}\tfrac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)}f(w)=\int d^Nw\sum_{m=1}^{N}\Big(e^{a}\left(1+h(1+\beta(N-1))\right)\tfrac{w_m+\nu}{y-w_m-1}\;*$$

$$* f(w_{j\neq m}, w_m+1)\prod_{m\neq n}\tfrac{\beta+w_m-w_n}{w_m-w_n} - \tfrac{w_m-1}{y-w_m}f(w)\prod_{m\neq n}\tfrac{w_m-w_n-\beta}{w_m-w_n}\Bigg) *$$
$$* \Bigg((1+h(1+\beta(N-1))p_1)\prod_{k=1}^{N} e^{aw_k}\tfrac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}\Delta^{(\Gamma)}(w)\Bigg).$$

Таким образом,опуская меру интегрирования,получаем вид,аналогичный q-случаю :

$$\Bigg\langle \sum_{m=1}^{N}\Bigg[e^{a}\left(1+h(1+\beta(N-1))\right)\tfrac{w_m+\nu}{y-w_m-1}f(w_{j\neq m}, w_m+1)\prod_{m\neq n}\tfrac{\beta+w_m-w_n}{w_m-w_n} -$$
$$-\tfrac{w_m-1}{y-w_m}f(w)\prod_{m\neq n}\tfrac{w_m-w_n-\beta}{w_m-w_n}\Bigg]\Bigg\rangle = 0.$$

Перепишем данное уравнение в виде контурного интеграла,охватывающего все точки w_m:

$$\Bigg\langle \oint_{C_x} d\xi \Bigg[e^{a}\left(1+h(1+\beta(N-1))\right)\tfrac{\xi+\nu}{y-\xi-1}e^{\partial_{w_m}}f(p_n)\prod_{j=1}^{N}\tfrac{\xi-w_j+\beta}{\xi-w_j} + \tfrac{\xi-1}{y-\xi}f(p_n)\prod_{j=1}^{N}\tfrac{\xi-w_j-\beta}{\xi-w_j}\Bigg]\Bigg\rangle = 0$$

Рассмотрим действие оператора $e^{\partial_{w_m}}$ на функции симметрических полиномов p_n:

$$e^{\partial_{w_m}}p_n = e^{\partial_{w_m}}\sum_{j=1}^{N}w_j^n = p_n + (w_m+1)^n - w_m^n \Longrightarrow e^{\partial_{w_m}}p_n = f(p_n+(\xi+1)^n-\xi^n)$$

В данном контурном интеграле имеется два полюса первого порядка $\xi = y-1, \xi = y$.

Выразим также произведения $\prod_{j=1}^{N}\frac{\xi-w_j-\beta}{\xi-w_j}$ через симметрические полиномы p_n,учитывая соответствующие подстановки для полюсов:

$$\prod_{j=1}^{N}\tfrac{\xi-w_j-\beta}{\xi-w_j}\Bigg|_{\xi=y} = exp[\sum_{j=1}^{N}ln(\tfrac{y-w_j-\beta}{y-w_j})] = exp[\sum_{j=1}^{N}(ln(1-\tfrac{w_j+\beta}{y}) - ln(1-\tfrac{w_j}{y}))] =$$
$$= exp[\sum_{j=1}^{N}(-1)\sum_{n>0}\tfrac{1}{ny^n}((w_j+\beta)^n - w_j^n)] = exp[(-1)\sum_{n>0}\tfrac{1}{ny^n}(\sum_{l=0}^{n-1}p_l C_n^l\beta^{n-l})].$$

Аналогично:

$$\prod_{j=1}^{N}\tfrac{\xi-w_j+\beta}{\xi-w_j}\Bigg|_{\xi=y-1} = exp[\sum_{j=1}^{N}ln(\tfrac{y-1-w_j+\beta}{y-w_j-1})] = exp[\sum_{j=1}^{N}(ln(1-\tfrac{w_j-\beta+1}{y}) - ln(1-\tfrac{w_j+1}{y}))] =$$
$$= exp[\sum_{j=1}^{N}(-1)\sum_{n>0}\tfrac{1}{ny^n}((w_j-\beta)^n - (w_j+1)^n)] = exp[(-1)\sum_{n>0}\tfrac{1}{ny^n}(\sum_{l=0}^{n-1}p_l C_n^l((1-\beta)^{n-l}-1))]$$

Также,для полюса $\xi = y-1$ перепишем:

$$(\xi+1)^n - \xi^n = y^n - (y-1)^n = -\sum_{l=0}^{n-1} y^l(-1)^{n-l}C_n^l = \sum_{l=0}^{n-1} y^l(-1)^{n-l+1}C_n^l \qquad (11)$$

Суммируя всё вышеописанное,получаем итоговый вид петлевых уравнений:

$$\xi = y-1: \quad e^a(y+\nu-1)\langle f(p_n+\sum_{l=0}^{n-1} y^l(-1)^{n-l+1}C_n^l)exp[-\sum_{n>0}\frac{1}{ny^n}(\sum_{l=0}^{n-1} p_l C_n^l((1-\beta)^{n-l}-1))]\rangle +$$

$$\xi = y: +(y-1)\langle f(p_n)exp[-\sum_{n>0}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{ny^n}C_n^l p_l \beta^{n-l}]\rangle = 0. \qquad (12)$$

На самом деле это не все полюса–есть ещё полюс в бесконечности.Вычислив его найдём,что полоюс в бесконечности сокращает все положительные степени по y,возникающие при разложении членов у полюсов $y-1, y$ и поэтому ниже мы можем сразу рассматривать только отрицательные степени по y,помня об этом факте.

2.4 Решение петлевых уравнений

Продемонстрируем методику получения полиномиальных средних на примере 2-ух первых уровней–величины $\langle p_1\rangle, \langle p_2\rangle, \langle p_1^2\rangle$.Сами уравнения будут получаться из рассмотрения ряда Лорана,получающегося из разложения экспоненты по отрицательным y,при отбрасывании неотрицательных степеней путём приравнивания всех коэффициентов при отрицательных степенях y нулю.

Продемонстрируем:

$f(p_n) = 1.$

$e^a(y+\nu-1)\langle exp[-(\frac{1}{y}(-N\beta)+\frac{1}{2y^2}(N(\beta^2-2\beta)-2\beta p_1)+\frac{1}{3y^3}(N(\beta-2)(\beta+(\beta-1)^2)+3p_1\beta(\beta-2)-3p_2\beta))]\rangle + (y-1)\langle exp[-(\frac{1}{y}(N\beta)+\frac{1}{2y^2}(N\beta^2+2\beta p_1)+\frac{1}{3y^3}(N\beta^3+3p_1\beta^2+3p_2\beta))]\rangle = 0.$

Разлагая экспоненту,получаем:

$e^a(y+\nu-1)(1+\frac{1}{y}(N\beta)+\frac{1}{2y^2}(2\beta\langle p_1\rangle-N(\beta^2-2\beta)+N^2\beta^2)+\frac{1}{3y^3}(3\langle p_2\rangle\beta-N(\beta-2)(\beta+(\beta-1)^2)-3\langle p_1\rangle\beta(\beta-2)+\frac{1}{2}N^3\beta^3+\frac{3}{2}N\beta(2\beta\langle p_1\rangle-N\beta(\beta-2))))+(y-1)(1-\frac{1}{y}(N\beta)+\frac{1}{2y^2}(N^2\beta^2-N\beta^2-2\beta\langle p_1\rangle)+\frac{1}{3y^3}(-(N\beta^3+3\langle p_1\rangle\beta^2+3\langle p_2\rangle\beta)-\frac{1}{2}(N^3\beta^3)+\frac{3}{2}N\beta(N\beta^2+2\beta\langle p_1\rangle))))=0.($

Приравнивая нулю коэффициенты при $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{y^2}$ соответственно получаем следующие уравнения:

$$\langle p_1\rangle\beta(e^a-1)+N\beta(1+e^a(\nu-1)+\tfrac{1}{2}e^a(N\beta-\beta+2)+\tfrac{1}{2}\beta(N-1))=0$$

$$\beta(e^a-1)\langle p_2\rangle+\langle p_1\rangle(e^a(N\beta-\beta+2)+\beta(N-1)+e^a(\nu-1)+1)+(\tfrac{1}{2}N\beta(e^a(\nu-1)(N\beta-\beta+2)-\beta(N-1))+\tfrac{1}{3}N(e^a(\tfrac{1}{2}N^2\beta^3-(\beta-2)(\beta+(\beta-1)^2)-\tfrac{3}{2}N\beta^2(\beta-2))-\tfrac{1}{2}N\beta^3(N-1)(N-2)))=0$$

Здесь h уже положено равным 0.Случай для $h\neq 0$ получается простой заменой e^a на $e^a(1+h(1+\beta(N-1)))$.В $u-$случае e^a надо заменить на $(1+h(u+1+(N-1)\beta))$.Уравнение на $\langle p_1^2\rangle$ получается,если положить $f(p_n)=p_1$.Соответственно $f(p_n+\sum\limits_{l=0}^{n-1}y^l(-1)^{n-l+1}C_n^l)=p_1+1$.Подставляя эту функцию в петлевые уравнения и приравнивая нулю коэффициент при $\frac{1}{y}$ получаем следующее уравнение:

$$\beta(e^a-1)\langle p_1^2\rangle+\langle p_1\rangle(N\beta(e^a(\nu-1)+1)+\tfrac{1}{2}(N^2\beta^2-N\beta^2+e^a(N^2\beta^2-N\beta^2+2\beta(N+1))))+e^aN\beta(\nu-1)+N\beta(N\beta-\beta+2)=0$$

Получаем следующие ответы:

$$\langle p_1\rangle=-\frac{N(N\beta-\beta-\beta e^a+2\nu e^a+N\beta e^a+2)}{(2(e^a-1))}$$

$$\langle p_2\rangle=\frac{N}{6(e^a-1)^2}(6e^a-6\beta+6N\beta+b^2e^{2a}+6\nu^2e^{2a}-3N\beta^2-18\beta e^a+18\nu e^a+\beta^2+2N^2\beta^2+10\beta^2e^a-18N\beta^2e^a-6\beta\nu e^{2a}-3N\beta^2e^{2a}+8N^2\beta^2e^a+18N\beta e^a+2N^2\beta^2e^{2a}-12\beta\nu e^a+12N\beta\nu e^a+6N\beta\nu e^{2a}+6)$$

$$\langle p_1^2\rangle=\frac{N}{4(e^a-1)^2}(4N+4e^a-4N\beta+N\beta^2+4N^2\beta-4\beta e^a+4\nu e^a-2N^2\beta^2+N^3\beta^2+2N\beta^2e^a+4N^2\beta e^a+N\beta^2e^{2a}-4N^2\beta^2e^a+2N^3\beta^2e^a+4N\nu^2e^{2a}+8N\nu e^a-2N^2\beta^2e^{2a}+N^3\beta^2e^{2a}+4N^2\beta\nu e^{2a}-4N\beta\nu e^a-4N\beta\nu e^{2a}+4N^2\beta^2\nu e^a)$$

2.5 Проверка и интересные наблюдения

В итоге после проверки на самосогласованность переопределённой системы уравнений,результаты сходятся на 3-ем уровне системы,что означает,что некоторые уравнения тривиальны,а система непротиворечива.Дополнительным источником доверия может служить тот факт,что было подсчитано значение среднего $\langle p_1 \rangle$ в случае одной переменной,а именно,с помощью компьютерного символьного вычисления был подсчитан ряд,который по определению и является h-интеграл:

$$\langle f \rangle = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+hk)e^{ak}\frac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(k)}f(k)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+hk)e^{ak}\frac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(k)}}$$

Подставляя сюда $f(k) = p_1 = k$ получаем величину,совпадающую с выражением для $\langle p_1(w) \rangle$,полученным из уравнений,причём результат сходится даже при $h \neq 0$ в первом порядке разложения по h.Дополнительно здесь есть 3 любопытных момента:

1. В случае,когда $u \sim 1$,который можно назвать u-случаем,величины для полиномиальных средних будут иметь вид,пропорциональный $\frac{1}{h}$,что является необычным и не совсем пока понятным результатом.Вычисления с помощью взятия ряда также дают расходящийся ответ.

2. Интересно то,что для взятия среднего по определению для получения правильного ответа нужно сначала посчитать ряд,а лишь потом устремить h к нулю.Если же сначала устремить h к нулю,а затем взять уже интеграл,то ответ будет другим,что интересно,так как ряд представляет собой всего лишь риманову сумму.

3. Может возникнуть определённое сомнение в том,что петлевые уравнения вообще необходимы,так как любое среднее можно посчитать по определению,однако даже подсчёт полиномов 2-ого порядка путём подсчёта ряда(то есть по определению) с помощью компьютерного символьного вычисления не дало результатов,так как заняло очень много времени,при этом не закончив подсчёт.

3 Предел симметрических полиномов Макдональда

Рассмотрим полиномы Макдональда.Их средние выражаются через параметры $q = e^h, t = e^{h\beta}, u = \frac{a}{h}$, а параметры ν, N остаются неизменными.Попробуем разложить средние от полиномов по h,а затем сравнить полученные выражения с полученными путём перевыражения симметрических полиномов в переменных x через переменные в переменных w,а также не забыть о поправках к мере h-усреднения,которые.как мы увидим,также играет роль.

Начнём с $M_{[1],[]} = p_1(x)$.Согласно общей формуле(см.[2])(для диаграмм Юнга использована французская нотация):

$$\langle M_Y(p_n)\rangle = \prod_{(i,j)\in Y} \frac{qt^{i-1}(1-t^{N-i+1}q^{j-1})(1-q^{u+j}t^{N-i})}{(1-t^{Y_j^T-i+1}q^{Y_i-j})(1-q^{u+\nu+j+1}t^{2N-i-1})} \tag{13}$$

В переменных w: $p_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i = \sum\limits_{i=1}^{N}(e^{hw_i})$ =(до 1-ого порядка по h)= $\sum\limits_{i=1}^{N}(1+hw_i) = N + hp_1(w)$. Среднее для $M_{[1],[]}$:

$$\langle M_{[1],[]}\rangle = \langle p_1(x)\rangle = \frac{q(t^N-1)(t^{N-1}q^{u+1}-1)}{(t-1)(t^{2N-2}q^{u+\nu+2}-1)}. \tag{14}$$

Раскладывая это выражение по h приходим к выражению:

$$\langle M_{[1][]}\rangle = N + h(-\frac{N(e^a\nu+1+1/2(e^a+1)\beta(N-1))}{e^a-1}) \tag{15}$$

Вспоминая выражение для p_1,понимаем,что данное разложение полностью соответствует разложению $p_1(x) = N + hp_1(w)$.

Попробуем сделать то же для 2-ого уровня.Возьмём наиболее простой из полиномов Макдональда $- M_{[1,1][]} = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2)$.Аналогичным образом разложим $p_2(x), p_1^2(x)$ по w:

$p_2(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} e^{2hw_i} = \sum\limits_{i=1}^{N}(1+2hw_i+\frac{1}{2}(2hw_i)^2) = N + 2hp_1(w) + 2h^2p_2(w)$,

$p_1^2(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} 1 + hw_i + \frac{(hw_i)^2}{2}\right)^2 = \left(N + hp_1(w) + \frac{h^2 p_2(w)}{2}\right)^2 = N^2 + 2Nhp_1(w) + h^2(p_1^2 + Np_2)$.

$$\langle M_{[1,1][]}\rangle = \frac{q^2 t(t^N - 1)(e^a q t^{N-1} - 1)(t^{N-1} - 1)(e^a q t^{N-2} - 1)}{(t^2 - 1)(e^a q^{v+2} t^{2N-2} - 1)(t - 1)(e^a q^{v+2} t^{2N-3} - 1)} \tag{16}$$

Где мы подставили $q^u = (e^h)^{\frac{a}{h}} = e^a$.Разложим q-среднее $M_{[1,1][]}$ по h до 2-ого порядка.С другой стороны подставим вышенаписанные разложения $p_1^2(x), p_2(x)$ по w.

$\langle M_{[1,1][]}\rangle = \langle \frac{1}{2}(p_1^2(x) - p_2(x))\rangle = \frac{1}{2}(N(N-1) + 2h(N-1)\langle p_1(w)\rangle + h^2(\langle p_1^2(w)\rangle + \langle p_2(w)\rangle(N-2)))$.

Подставляя результат для средних $\langle p_1(w)\rangle, \langle p_1^2(w)\rangle, \langle p_2(w)\rangle$ получаем,что в 0-ом и 1-ом порядке по h результат сходится с разложением q-среднего,а во 2-ом порядке нет.

Попытаемся решить эту проблему,учитывая поправки к мере,по которой берётся усреднение.Разделим вклады в мере следующим образом:

$$\langle p_2(x)\rangle = \frac{\langle (N + 2hp_1(w) + 2h^2 p_2(w))(1 + hA + \frac{1}{2}h^2 B)\rangle}{\langle (1 + hA + \frac{1}{2}h^2 B)\rangle} \tag{17}$$

Аналогично для $p_1^2(w)$:

$$\langle p_1^2(x)\rangle = \frac{\langle (N^2 + 2hNp_1(w) + h^2(p_1^2 + Np_2(w)))(1 + hA + \frac{1}{2}h^2 B)\rangle}{\langle (1 + hA + \frac{1}{2}h^2 B)\rangle} \tag{18}$$

Раскладывая по h до 2-ого порядка находим,что:

$\langle p_2(x)\rangle = (N + h(2\langle p_1(w)\rangle + N\langle A\rangle) + h^2(2\langle p_2(w)\rangle + \frac{N\langle B\rangle}{2} + 2\langle p_1(w)A\rangle))(1 - h\langle A\rangle + h^2(\langle A\rangle^2 - \frac{\langle B\rangle}{2})) = N + 2hp_1(w) + h^2(2\langle p_2(w)\rangle + 2\langle p_1(w)A\rangle - 2\langle A\rangle\langle p_1(w)\rangle)$.

Видим,что 2-ого порядка поправок по мере не требуется,что облегчает задачу по их вычислению.Аналогично для $p_1^2(x)$:

$$\langle p_1^2(x)\rangle = N^2 + 2hN\langle p_1(w)\rangle + h^2(\langle p_1^2(w)\rangle + N\langle p_2(w)\rangle + 2N\langle p_1(w)A\rangle - 2N\langle p_1(w)\rangle\langle A\rangle). \tag{19}$$

Перейдём теперь к структуре поправок к мере.Вспомним исходное выражение:

$$\langle f(x)\rangle = \frac{\int d_q^N x \prod_{k=1}^{N}\left(x_k^u \prod_{a=0}^{\nu-1}(q^a x_k - 1)\right)\Delta^{(q,t)} f(x)}{\int d_q^N x \prod_{k=1}^{N}\left(x_k^u \prod_{a=0}^{\nu-1}(q^a x_k - 1)\right)\Delta^{(q,t)}} \tag{20}$$

- $\int d_q^N x \longrightarrow \int d_h^N w \prod_{i=1}^{N} x_i$.

- $\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(q^k x_i - 1) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+h(k+w_i)+\frac{h^2}{2}(k+w_i)^2-1) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1} h(k+w_i)(1+\frac{h}{2}(k+w_i)) = \prod_{i=1}^{N} h^\nu \prod_{k=0}^{\nu-1}(k+w_i)\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+\frac{h}{2}(k+w_i)) = \prod_{i=1}^{N} h^\nu \prod_{k=0}^{\nu-1}(k+w_i)\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+\frac{h}{2}(k+w_i))$ =(мера без поправок)$\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+\frac{h}{2}(k+w_i))$ =(мера без поправок)$\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+\frac{h}{2}w_i+\frac{h}{2}k)$ =(мера без поправок)$\prod_{i=1}^{N}(1+\frac{h}{2}\nu w_i+\frac{h}{2}\frac{\nu(\nu-1)}{2})$ =(мера без поправок)$(1+\frac{h}{2}\nu p_1(w)+\frac{h}{2}N\frac{\nu(\nu-1)}{2})$

- $\Delta^{(q,t)}(x) = \prod_{i\neq j}\prod_{k=0}^{\beta-1}(x_i - q^k x_j) = \prod_{i\neq j} x_i^\beta \prod_{i\neq j}\prod_{k=0}^{\beta-1}(1-q^k\frac{x_j}{x_i}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta}\prod_{i\neq j}\prod_{k=0}^{\beta-1}(1-e^{h(k+w_j-w_i)}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta}\prod_{i\neq j}\prod_{k=0}^{\beta-1}(-h)(k+w_j-w_i)(1+\frac{h}{2}(k+w_j-w_i)) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta}$(мера без поправок)$\prod_{i\neq j}\prod_{k=0}^{\beta-1}(1+\frac{h}{2}(k+w_j-w_i)) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta}$(мера без поправок)$\prod_{i\neq j}(1+\frac{h}{2}\beta(w_j-w_i)+\frac{h}{2}\frac{\beta(\beta-1)}{2}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta}$(мера без поправок)$(1+\frac{h}{2}N(N-1)\frac{\beta(\beta-1)}{2})$.

- $\prod_{i=1}^{N} x_i^u = \prod_{i=1}^{N} e^{aw_i}$.

Собирая всё вместе находим поправку:

$1+hA = 1+h\left(p_1(w)(\beta(N-1)+1+\frac{\nu}{2})+\frac{1}{4}(\nu(\nu-1)N+N(N-1)\beta(\beta-1))\right)$,откуда и находим A.

$$A = p_1(w)(\beta(N-1)+1+\frac{\nu}{2})+\frac{1}{4}(\nu(\nu-1)N+N(N-1)\beta(\beta-1)). \tag{21}$$

Поправка A имеет вид $A = C_1 p_1(w) + C_2$.Рассмотрим это поподробнее: $\langle A p_1(w)\rangle - \langle A\rangle\langle p_1(w)\rangle = \langle (C_1 p_1(w) + C_2) p_1(w)\rangle - \langle C_1 p_1(w) + C_2\rangle\langle p_1(w)\rangle = C_1(\langle p_1^2(w)\rangle - (\langle p_1(w)\rangle)^2) + C_2(\langle p_1(w)\rangle - \langle p_1(w)\rangle) = C_1(\langle p_1^2(w)\rangle - (\langle p_1(w)\rangle)^2)$.

Собирая всё вместе,получаем итоговое разложение $M_{[1,1][]}$ через полиномы от w:

$\langle M_{[1,1][]}\rangle = \frac{1}{2}(\langle p_1^2(x)\rangle - \langle p_2(x)\rangle) = \frac{1}{2}(N(N-1) + 2h\langle p_1(w)\rangle(N-1) + h^2(\langle p_1^2(w)\rangle + (N-2)\langle p_2(w)\rangle + (N-1)(2(\beta(N-1)+1)+\nu)(\langle p_1^2(w)\rangle - (\langle p_1(w)\rangle)^2)))$.

Подставляя выражения для $\langle p_1(w)\rangle, \langle p_2(w)\rangle, \langle p_1^2(w)\rangle$ из уравнений получаем соответствие в 0-ом,1-ом и 2-ом порядках.

4 Вывод собственных функций рационильной модели Руджнаарса-Шнейдера

4.1 Первый подход

Рассмотрим теперь вопрос о собственных функциях гамильтониана рационального Руджнаарса.Гамильтониан имеет вид(см.[4]):

$$H^{rR} = \sum_{i=1}^{N} \prod_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} e^{\partial_{w_i}} \tag{22}$$

Выделим в гамильтониане операторы $\hat{O}_i = \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} e^{\partial_{w_i}}$.Введём функции $\Gamma_i = \prod\limits_{k\neq i} \frac{\Gamma(w_i - w_k)}{w_i - w_k + \beta}$. Как действуют операторы $\hat{O}_i$ на Γ_i?Оператор экспоненты действует так:

- $e^{\partial_{w_i}}\Gamma_i = e^{\partial_{w_i}} \prod\limits_{k\neq i} \frac{\Gamma(w_i-w_k)}{\Gamma(w_i-w_k+\beta)} = \prod\limits_{k\neq i} \frac{\Gamma(w_i-w_k+1)}{\Gamma(w_i-w_k+\beta+1)} = \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i-w_k}{w_i-w_k+\beta} \prod\limits_{k\neq i} \frac{\Gamma(w_i-w_k)}{\Gamma(w_i-w_k+\beta)}$

- $(i\neq j) : e^{\partial_{w_j}}\Gamma_i = e^{\partial_{w_j}} \prod\limits_{k\neq i} \frac{\Gamma(w_i-w_k)}{\Gamma(w_i-w_k+\beta)} = \frac{\Gamma(w_i-w_j-1)}{\Gamma(w_i-w_j+\beta-1)} \prod\limits_{k\neq i,k\neq j} \frac{\Gamma(w_i-w_k)}{\Gamma(w_i-w_k+\beta)} =$
$\frac{(w_i-w_j+\beta-1)}{(w_i-w_j-1)} \frac{\Gamma(w_i-w_j)}{\Gamma(w_i-w_j+\beta)} \prod\limits_{k\neq i,k\neq j} \frac{\Gamma(w_i-w_k)}{\Gamma(w_i-w_k+\beta)} = \frac{(w_i-w_j+\beta-1)}{(w_i-w_j-1)} \prod\limits_{k\neq i,k\neq j} \frac{\Gamma(w_i-w_k)}{\Gamma(w_i-w_k+\beta)} = \frac{(w_i-w_j+\beta-1)}{(w_i-w_j-1)}\Gamma_i$.

Соответственно для оператора $\hat{O}_i$ имеем:

- $\hat{O}_i \Gamma_i = \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} e^{\partial_{w_i}} \Gamma_i = \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i - w_k}{w_i - w_k + \beta} \prod\limits_{k\neq i} \frac{\Gamma(w_i - w_k)}{\Gamma(w_i - w_k + \beta)} = \prod\limits_{k\neq i} \frac{\Gamma(w_i - w_k)}{\Gamma(w_i - w_k + \beta)} = \Gamma_i.$
- $(i \neq j) : \hat{O}_j \Gamma_i = \prod\limits_{k\neq j} \frac{w_j - w_k + \beta}{w_j - w_k} e^{\partial_{w_j}} \Gamma_i = \frac{(w_i - w_j + \beta - 1)}{(w_i - w_j - 1)} \prod\limits_{k\neq j} \frac{w_j - w_k + \beta}{w_j - w_k} \Gamma_i.$

Гамильтониан можно тогда выразить в виде $H^{rR} = \sum\limits_{i=1}^{N} \hat{O}_i$.

Попробуем сумму или произведение величин Γ_i в качестве собственной функции.

- $\sum\limits_{i=1}^{N} \hat{O}_i \Gamma_j = \Gamma_j + \sum\limits_{i\neq j} \left(\prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} \right) \frac{w_j - w_i + \beta - 1}{w_j - w_i - 1} \Gamma_j.$

  $\sum\limits_{i=1}^{N} \hat{O}_i \sum\limits_{j=1}^{N} \Gamma_j = \sum\limits_{j=1}^{N} \Gamma_j + \sum\limits_{j=1}^{N} \Gamma_j \left(\sum\limits_{i\neq j} \left(\prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} \right) \frac{w_j - w_i + \beta - 1}{w_j - w_i - 1} \right)$
- $\sum\limits_{i=1}^{N} \hat{O}_i \prod\limits_{j=1}^{N} \Gamma_j = \sum\limits_{i=1}^{N} \hat{O}_i \Gamma_i \prod\limits_{j\neq i}^{N} \Gamma_j = \sum\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i \prod\limits_{j\neq i}^{N} e^{\partial_{w_i}} \Gamma_j = \sum\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i \prod\limits_{j\neq i}^{N} \frac{(w_j - w_i + \beta - 1)}{(w_j - w_i - 1)} \Gamma_j =$

  $= \sum\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i \prod\limits_{j\neq i}^{N} \frac{(w_j - w_i + \beta - 1)}{(w_j - w_i - 1)} \prod\limits_{j\neq i}^{N} \Gamma_j = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} \prod\limits_{j=1}^{N} \Gamma_j \right) \sum\limits_{i=1}^{N} \prod\limits_{j\neq i}^{N} \frac{(w_j - w_i + \beta - 1)}{(w_j - w_i - 1)}$

Можно проверить,что соответствующие выражения $\left(\sum\limits_{i\neq j} \left(\prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} \right) \frac{w_j - w_i + \beta - 1}{w_j - w_i - 1} \right)$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \prod\limits_{j\neq i}^{N} \frac{(w_j - w_i + \beta - 1)}{(w_j - w_i - 1)}$ не сводятся к постоянной величине,поэтому сумма и произведение Γ_i собственными функциями не являются.Было проверено ещё несколько вариантов комбинаций,симметричных по $w_1, \ldots, w_N$ и составленных из комбинаций Γ_i,но ни одна из них не является собственной функцией.

4.2 Второй подход

Пока у нас не получилось построить собственную функцию для гамильтониана H^{rR}.Однако в действительности можно указать целый класс функций,каждая из которых будет являться собственной.Для того,чтобы это показать,докажем одно небольшое утверждение.

Лемма:
$$\sum_{i=1}^{N}\prod_{k\neq i}\frac{w_i-w_k+\alpha}{w_i-w_k}=N. \tag{23}$$

Доказательство:Расположим точки $w_1,...,w_N$ на комплексной плоскости.Окружим их контуром C_w.Тогда можем записать:

$\sum\limits_{i=1}^{N}\prod\limits_{k\neq i}\frac{w_i-w_k+\alpha}{w_i-w_k}=\frac{1}{2\pi i\alpha}\oint\limits_{C_w}\prod\limits_{j=1}^{N}\frac{z-w_j+\alpha}{z-w_j}$.Действительно,каждый полюс имеет 1-ый порядок,а всего полюсов N.Беря вычеты во всех полюсах получаем исходное выражение.Далее,из основной теоремы теории вычетов следует,что:$\frac{1}{2\pi i\alpha}\oint\limits_{C_w}\prod\limits_{j=1}^{N}\frac{z-w_j+\alpha}{z-w_j}=-\frac{1}{2\pi i\alpha}\oint\limits_{C_\infty}\prod\limits_{j=1}^{N}\frac{z-w_j+\alpha}{z-w_j}$.

$\frac{1}{2\pi i\alpha}\oint\limits_{C_\infty}\prod\limits_{j=1}^{N}\frac{z-w_j+\alpha}{z-w_j}=\frac{1}{\alpha}Res\left[\prod\limits_{j=1}^{N}\frac{z-w_j+\alpha}{z-w_j},z=\infty\right]=$(замена переменных $z=\frac{1}{\eta}$)

$=-\frac{1}{\alpha}Res\left[\frac{1}{\eta^2}\prod\limits_{j=1}^{N}\frac{\frac{1}{\eta}-w_j+\alpha}{\frac{1}{\eta}-w_j},\eta=0\right]=-\left(\prod\limits_{j=1}^{N}\frac{(w_j-\alpha)\eta-1}{w_j\eta-1}\right)'\Bigg|_{\eta=0}=-\frac{1}{\alpha}\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\prod\limits_{i\neq j}\frac{(w_i-\alpha)\eta-1}{w_j\eta-1}\right)\frac{\alpha}{(w_j\eta-1)^2}\Bigg|_{\eta=0}$

$=-\frac{\alpha N}{\alpha}=-N$.Вспоминая про ещё один знак минус находим,что лемма доказана.

Таким образом,если для любого оператора $e^{\partial_{w_i}}$ функция будет собственной,то она будет собственной и для всего H^{rR}.Так как для любой i действие оператора должно быть одинаково,то функция симметрична.Из условия $f(w_i+1)=f(w_i)$ следует периодичность.Общий класс функций,как уже было сказано,являющихся собственными для H^{rR} это класс функций,являющихся собственными для любого из операторов $e^{\partial_{w_i}}$ с одинаковыми собственными значениями,явно выражаемым подклассом этого класса являются все симметрические периодические функции.

Для нахождения собственных функций не из множества симметрических и периодических и даже не симметрических функций,воспользуемся небольшой подсказкой,которую извлечём из работы [1912.09969].Возьмём из этой работы выражение для "нетривиальной"собственной функции в случае 2-ух переменных:

$$\psi(w_1,w_2|z_1,z_2) = z_2^{w_1+w_2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{w_1}\frac{\Gamma(w_1-w_2)}{\Gamma(w_1-w_2+\beta)}{}_2F_1\left(\frac{\epsilon_+}{\epsilon_1},\frac{\epsilon_++w_1-w_2}{\epsilon_1};\frac{\epsilon_1+w_1-w_2}{\epsilon_1}|\frac{z_2}{z_1}\right) \tag{24}$$

Сделаем упрощение,положив $z_1 = z_2$.Рассмотрим теперь нетривиальную часть ψ,а именно ${}_2F_1$,так как дробь с Гамма-функциями уже является тем,что нам нужно.Сравнивая вид Гамильтониана с тем,что дан в работе [4],приходим к выводу,что $\epsilon_1 = -1, \epsilon_+ = \beta - 1$.Итак:

${}_2F_1(1-\beta, w_2-w_1+1-\beta; w_2-w_1+1|1) = \frac{\Gamma(w_2-w_1+1)}{\Gamma(w_2-w_1+\beta)} *$(константа).

Здесь мы использовали известную упрощающую формулу ${}_2F_1(a,b;c|1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$,которую можно посмотреть например в [5] (1.2.11).з вышенаписанного можно,опуская константные факторы,сформировать кандидата в несимметричные собственные функции:

$$K_2 = \frac{\Gamma(w_1-w_2)\Gamma(w_2-w_1+1)}{\Gamma(w_1-w_2+\beta)\Gamma(w_2-w_1+\beta)} \tag{25}$$

Проверим,является ли эта функция собственной для гамильтониана H^{rR} от двух переменных.

$$H^{rR}(w_1,w_2)K_2 = \frac{w_1-w_2+\beta}{w_1-w_2}e^{\partial_{w_1}}\left(\frac{\Gamma(w_1-w_2)\Gamma(w_2-w_1+1)}{\Gamma(w_1-w_2+\beta)\Gamma(w_2-w_1+\beta)}\right)+\frac{w_2-w_1+\beta}{w_2-w_1}e^{\partial_{w_2}}\left(\frac{\Gamma(w_1-w_2)\Gamma(w_2-w_1+1)}{\Gamma(w_1-w_2+\beta)\Gamma(w_2-w_1+\beta)}\right) =$$
$$\frac{w_1-w_2+\beta}{w_1-w_2}\frac{w_1-w_2}{w_1-w_2+\beta}\frac{\Gamma(w_1-w_2)}{\Gamma(w_1-w_2+\beta)}\frac{\Gamma(w_2-w_1)}{\Gamma(w_2-w_1+\beta)}\frac{w_2-w_1+\beta-1}{w_2-w_1}+\frac{w_2-w_1+\beta}{w_2-w_1}\frac{\Gamma(w_1-w_2)}{\Gamma(w_1-w_2+\beta)}\frac{w_1-w_2+\beta-1}{w_1-w_2-1}\frac{\Gamma(w_2-w_1+1)}{\Gamma(w_2-w_1+\beta)}\frac{w_2-w_1+1}{w_2-w_1+\beta} =$$
$$K_2\left(\frac{w_2-w_1+\beta-1}{w_2-w_1}+\frac{w_2-w_1+\beta-1}{w_2-w_1}\right) = 2K_2.$$

То,что нам и было нужно.Обобщим эту функцию на случай произвольного числа N переменных.

$$K_N = \prod_{i<j}\frac{\Gamma(w_i-w_j)\Gamma(w_j-w_i+1)}{\Gamma(w_i-w_j+\beta)\Gamma(w_j-w_i+\beta)} \tag{26}$$

Для более удобной проверки разделим K_N на две части для произвольного i.Пусть $\tilde{w} = (w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots,w_N)$.Тогда $K_N(w) = \tilde{K}_N(\tilde{w})K_{N,i}(\tilde{w},w_i)$.

$$K_{N,i} = \prod_{k<i}\frac{\Gamma(w_k-w_i)\Gamma(w_i-w_k+1)}{\Gamma(w_k-w_i+\beta)\Gamma(w_i-w_k+\beta)}\prod_{i<m}\frac{\Gamma(w_i-w_m)\Gamma(w_m-w_i+1)}{\Gamma(w_i-w_m+\beta)\Gamma(w_m-w_i+\beta)}. \tag{27}$$

Вспомним операторы $\hat{O}_i$,$H^{rR} = \sum\limits_{i=1}^{N} \hat{O}_i$.Рассмотрим действие оператора $\hat{O}_i$ на $K_{N,i}$:

$\hat{O}_i K_{N,i} = \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i-w_k+\beta}{w_i-w_k} e^{\partial_{w_i}} K_{N,i} = \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i-w_k+\beta}{w_i-w_k} \prod\limits_{k<i} \frac{\Gamma(w_k-w_i)\Gamma(w_i-w_k+1)}{\Gamma(w_k-w_i+\beta)\Gamma(w_i-w_k+\beta)} \frac{(w_i-w_k+1)(w_k-w_i+\beta-1)}{(w_k-w_i-1)(w_i-w_k+\beta)}$
$\prod\limits_{i<m} \frac{\Gamma(w_i-w_m)\Gamma(w_m-w_i+1)}{\Gamma(w_i-w_m+\beta)\Gamma(w_m-w_i+\beta)} \frac{(w_i-w_m)(w_m-w_i+\beta-1)}{(w_m-w_i)(w_i-w_m+\beta)} = K_{N,i} \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i-w_k+\beta}{w_i-w_k} \prod\limits_{k<i} \frac{w_i-w_k+(1-\beta)}{w_i-w_k+\beta}$
$\prod\limits_{i<m} \frac{w_i-w_m+(1-\beta)}{w_i-w_m+\beta} = K_{N,i} \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i-w_k+(1-\beta)}{w_i-w_k}$.
Отсюда действие $\hat{O}_i$ на K_N: $\hat{O}_i K_N = \tilde{K}_N \hat{O}_i K_{N,i} = K_N \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i-w_k+\alpha}{w_i-w_k}$, где $\alpha = 1-\beta$.

Отсюда $H^{rR} K_N = \sum\limits_{i=1}^{N} \hat{O}_i K_N = K_N \sum\limits_{i=1}^{N} \prod\limits_{k\neq i} \frac{w_i-w_k+\alpha}{w_i-w_k}$.

Вспоминая доказанную выше лемму приходим к тому,что K_N действительно собственная функция H^{rR}.

$$H^{rR} K_N = N K_N. \tag{28}$$

5 Заключение

В данной работе был продемонстрирован переход к нетривиальному 4d/2d пределу из 5d/3d случая,считая 5-ое измерение выраженным через S_1,с радиусом h,который собственно мы и устремили к 0.Мы получили меру для интегралов Сельберга,которые используются в записи конформных блоков в представлении Доценко-Фатеева,а затем вывели петлевые уравнения для полиномиальных средних,усреднённых по новой мере,что позволяет облегчить задачу подсчёта интегралов Сельберга и конформных блоков в данной теории.Были проведены три проверки правильности этих уравнений и ответов для них,одна из которых может быть использована для альтернативного получения полиномиальных средних.Мы разложили средние от полиномов Макдональда по h с одной стороны,а также посчитали разложения полинома Макдональда по новым симметрическим полиномам от новых переменных и,прировняв два выражения получили аналог петлевых уравнений от полинмоиальных средних в новых переменных.Мы использовали эту конструкцию для проверки петлевых уравнений,но можно использоать и как альтернативу петлевым уравнениям.Были исследованы свойства гамильтониана рациональной модели Рудженаарса-Шнейдера,который является h-пределом гамильтониана тригонометрической модели Рудженаарса-Шнейдера,в частности вопрос о его собственных функциях.Было указано на наличие целого класса собственных функций,такой класс является тривиальным.Вне этого класса путём обобщения результата [4] была построена неполиномиальная собственная функция.

Литература

[1] V.S. Dotsenko,V.Fateev "Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models," Nuclear Physics B Volume 240, Issue 3, 15 October 1984, Pages 312-348.

[2] Y. Zenkevich,"Generalized Macdonald polynomials, spectral duality for conformal blocks and AGT correspondence in five dimensions ",[arXiv:14128592[hep-th]]

[3] A. Nedelin, S. Pasquetti, Y. Zenkevich,"T[U(N)] duality webs: mirror symmetry, spectral duality and gauge/CFT correspondences ",[arXiv:1712.08140 [hep-th]]

[4] F.Nieri,Y.Zenkevich,"Quiver $W_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ algebras of 4d N=2 gauge theories",[arXiv:1912.09969]

[5] J.Gasper,M.Rahman," Basic hypergeometric series",Moscow,"Mir",1993.

[6] L.Alday,D.Gaiotto,Y.Tachikawa,"Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories",[arXiv:0906.3219]

[7] P. Di Francesco,P.Mathieu,D.Senechal,"Conformal field theory",New York,"Springer-Verlag",1997.

[8] A.Morozov,A.Smirnov,"Finalizing the proof of AGT relation with the help of Generalized Jack polynomials",[arXiv:1307.2576]

[9] V.Kac,P.Cheung,"Quantum Calculus",New York,"Springer-Verlag",2002.

[10] A.Mironov,A.Morozov,Sh.Shakirov,"A direct proof of AGT conjecture at $\beta = 1$",[arXiv:1012.3137]

[11] A.Mironov,A.Morozov,Sh.Shakirov,A.Smirnov,"Proving AGT conjecture as HS duality: extension to five dimensions",[arXiv:1105.0948]